Outils pour la physique

Outils mathématiques – TD

Exercice 1 : Nombres complexes

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument des fonctions de transfert suivantes (où A, τ et ω sont des réels positifs) :

1. $\underline{H}(\omega) = -\dfrac{A}{1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$;
2. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$;
3. $\underline{H}(\omega) = \dfrac{1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega}{1-\mathrm{j}\,\tau\omega}$;
4. $\underline{H}(\omega) = A\,\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\tau\,\omega}$.

Correction :

1. On peut exprimer : $\underline{H}(\omega) = -\dfrac{A\,(1-\mathrm{j}\,\tau\,\omega)}{(1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega)\,(1-\mathrm{j}\,\tau\,\omega)} = -\dfrac{A}{1+\tau^2\,\omega^2} + \mathrm{j}\,\dfrac{A\,\tau\,\omega}{1+\tau^2\,\omega^2}$, d'où : $\mathrm{Re}(\underline{H}) = -\dfrac{A}{1+\tau^2\,\omega^2}$ et $\mathrm{Im}(\underline{H}) = \dfrac{A\,\tau\,\omega}{1+\tau^2\,\omega^2}$.

   On a : $|\underline{H}| = \dfrac{|-A|}{|1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega|} = \dfrac{A}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$.

   Comme $\mathrm{Re}(\underline{H}) < 0$, on a : $\arg(\underline{H}) = \pi + \arctan\left(\dfrac{A\,\tau\,\omega}{-A}\right) = \pi - \arctan(\tau\,\omega)$.
2. On peut exprimer : $\underline{H}(\omega) = -\dfrac{\mathrm{j}}{\tau\,\omega}$, d'où : $\mathrm{Re}(\underline{H}) = 0$ et $\mathrm{Im}(\underline{H}) = -\dfrac{1}{\tau\,\omega}$.

   On a : $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\tau\,\omega}$.

   Comme $\underline{H}$ est un imaginaire pur et $\mathrm{Im}(\underline{H}) < 0$, on a : $\arg(\underline{H}) = -\dfrac{\pi}{2}$.
3. On peut exprimer : $\underline{H}(\omega) = \dfrac{(1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega)\,(1+\mathrm{j}\,\tau\omega)}{(1-\mathrm{j}\,\tau\omega)\,(1+\mathrm{j}\,\tau\omega)} = \dfrac{1-\tau^2\,\omega^2}{1+\tau^2\,\omega^2} + \mathrm{j}\,\dfrac{2\,\tau\,\omega}{1+\tau^2\,\omega^2}$, d'où : $\mathrm{Re}(\underline{H}) = \dfrac{1-\tau^2\,\omega^2}{1+\tau^2\,\omega^2}$ et $\mathrm{Im}(\underline{H}) = \dfrac{2\,\tau\,\omega}{1+\tau^2\,\omega^2}$.

   On a : $|\underline{H}| = \dfrac{|1+\mathrm{j}\,\tau\,\omega|}{|1-\mathrm{j}\,\tau\omega|} = \dfrac{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}}{\sqrt{1+\tau^2\,\omega^2}} = 1$.

   L'expression de l'argument dépend du signe de la partie réelle :
   - si $1-\tau^2\,\omega^2 > 0$, alors : $\arg(\underline{H}) = \arctan\left(\dfrac{2\,\tau\,\omega}{1-\tau^2\,\omega^2}\right)$;
   - si $1-\tau^2\,\omega^2 < 0$, alors : $\arg(\underline{H}) = \pi + \arctan\left(\dfrac{2\,\tau\,\omega}{1-\tau^2\,\omega^2}\right)$.
4. Comme $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\pi}{2}}$, on peut exprimer :

   $\underline{H} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\tau\,\omega+\frac{\pi}{2}\right)} = A\cos\left(\tau\,\omega+\dfrac{\pi}{2}\right)+\mathrm{j}\,A\sin\left(\tau\,\omega+\dfrac{\pi}{2}\right) = -A\sin(\tau\,\omega)+\mathrm{j}\,A\cos(\tau\,\omega)$, d'où : $\mathrm{Re}(\underline{H}) = -A\sin(\tau\,\omega)$ et $\mathrm{Im}(\underline{H}) = A\cos(\tau\,\omega)$.

   À partir de la forme exponentielle, on en déduit que : $|\underline{H}| = A$ et $\arg(\underline{H}) = \tau\,\omega + \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 : Valeurs moyennes

1. Montrer que $\langle\cos t\rangle = 0$ sur une période.
2. Montrer que $\langle\cos^2 t\rangle = \dfrac{1}{2}$ sur une période.

Correction :

1. La fonction étant périodique de période $2\,\pi$, on obtient : $\langle \cos t \rangle = \dfrac{1}{2\,\pi} \displaystyle\int_0^{2\,\pi} \cos t \,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\,\pi} \left[\sin t\right]_0^{2\,\pi} = 0$.

2. À l'aide des relations trigonométriques, on peut exprimer : $\cos^2 t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2\,t)}{2}$. La fonction étant périodique de période π, on obtient : $\langle \cos^2 t \rangle = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\,t)}{2}\right] \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2\,t)}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 : Équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes (en utilisant le formulaire de cours si nécessaire) :

1. $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} + \rho\,g = 0$, avec ρ et g des constantes, sachant que $P(z=0) = P_0$;

2. $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} = 0$, sachant que $T(x=0) = T_0$ et $T(x=L) = T_1$;

3. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{\tau} = \dfrac{E}{\tau}$, avec τ et E des constantes, sachant que $u(t=0) = 0$;

4. $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k\,x$, avec m et k des constantes, sachant que $x(t=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t=0) = v_0$ où v_0 est une constante ;

5. $\dfrac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + 2\,\omega_0\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,i = 0$, avec ω_0 une constante, sachant que $i(t=0) = I_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$ où I_0 est une constante.

Correction :

1. En intégrant $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho\,g$, on obtient : $P(z) = -\rho\,g\,z + C_1$.

Comme $P(0) = P_0 = C_1$, on en déduit : $P(z) = -\rho\,g\,z + P_0$.

2. En intégrant, on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = C_1$, puis : $T(x) = C_1\,x + C_2$.

Comme $T(0) = T_0 = C_2$ et $T(L) = T_1 = C_1\,L + C_2$, soit : $C_1 = \dfrac{T_1 - T_0}{L}$, on en déduit : $T(x) = \dfrac{T_1 - T_0}{L}\,x + T_0$.

3. La solution est de la forme : $u(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$.

Comme $u(0) = 0 = C_1 + E$, soit : $C_1 = -E$, on en déduit : $u(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$.

4. On a : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}\,x = 0$, donc la solution est de la forme : $x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$.

Comme $x(0) = 0 = C_1$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = C_2\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, soit : $C_2 = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, on en déduit : $x(t) = v_0\sqrt{\dfrac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)$.

5. Comme $Q = \dfrac{1}{2}$, on a un régime critique, d'où la solution : $i(t) = (C_1\,t + C_2)\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}$.

Comme $i(0) = I_0 = C_2$ et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) = 0 = C_1 - \omega_0\,I_0$, soit : $C_1 = \omega_0\,I_0$, on en déduit : $i(t) = I_0\,(1 + \omega_0\,t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}$.

Exercice 4 : Dérivées partielles et équation de propagation

Soit le champ électrique $E(x,t) = E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$, avec E_0, ω et k des constantes positives.

1. Exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial E}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial E}{\partial t}$.

2. En déduire l'expression de la différentielle $\mathrm{d}E$.

3. Exprimer les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x\,\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x}$, puis vérifier le théorème de Schwarz.

Le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

avec c une constante.

4. Exprimer la constante c en fonction de ω et k.

Correction :

1. On exprime :
- $\dfrac{\partial E}{\partial x} = k\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)$;
- $\dfrac{\partial E}{\partial t} = -\omega\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)$.

2. On en déduit : $\mathrm{d}E = \dfrac{\partial E}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial E}{\partial t}\,\mathrm{d}t = (k\,\mathrm{d}x - \omega\,\mathrm{d}t)\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)$.

3. On exprime :
- $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[k\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)\right] = -k^2\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$;
- $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[-\omega\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)\right] = -\omega^2\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$;
- $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x\,\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-\omega\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)\right] = k\,\omega\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$;
- $\dfrac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[k\,E_0 \sin(\omega\,t - k\,x)\right] = k\,\omega\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x)$.

Le théorème de Schwarz est bien vérifié car $\dfrac{\partial^2 E}{\partial x\,\partial t} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial t\,\partial x}$.

4. En remplaçant dans l'équation de d'Alembert, on obtient : $-k^2\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x) + \dfrac{1}{c^2}\,\omega^2\,E_0 \cos(\omega\,t - k\,x) = 0$, d'où : $c^2 = \dfrac{\omega^2}{k^2}$, soit : $c = \pm\dfrac{\omega}{k}$.

Exercice 5 : Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

1. Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ définis en coordonnées cylindriques dans la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
2. Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cylindriques.
3. Exprimer la vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.
4. Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques.

Correction :

1. En projetant, on obtient : $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$.

2. On a : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$.

3. On a : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\left(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z\right)}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{z}\,\vec{e}_z$.

Comme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y = -\sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$, on obtient :
$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$.

4. On a : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z\right)}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} + \ddot{z}\,\vec{e}_z$.

Comme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mathrm{d}(\sin\theta)}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\,\vec{e}_y = -\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_y = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$, on obtient :
$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta + \ddot{z}\,\vec{e}_z$.

Exercice 6 : Surface et volume d'une sphère

On considère une sphère de centre O et de rayon R, et on se place en coordonnées sphériques.

1. Montrer que sa surface est $4\,\pi\,R^2$ en intégrant des surfaces infinitésimales $\mathrm{d}S_r$.

2. Montrer que son volume est $\dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3$ en intégrant des volumes infinitésimaux $\mathrm{d}V$.

Correction :

1. En intégrant les surfaces infinitésimales $\mathrm{d}S_r = R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, on a : $S_{\text{sphère}} = \oiint_{\text{sphère}} \mathrm{d}S_r = \oiint_{\text{sphère}} R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, soit en séparant les variables : $S_{\text{sphère}} = R^2 \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi = R^2\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\,[\varphi]_0^{2\,\pi} = 4\,\pi\,R^2$.

2. En intégrant les volumes infinitésimaux $\mathrm{d}V$, on a : $V_{\text{sphère}} = \iiint_{\text{sphère}} \mathrm{d}V = \iiint_{\text{sphère}} r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$, soit en

séparant les variables : $V_{\text{sphère}} = \displaystyle\int_{r=0}^{R} r^2\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_{\varphi=0}^{2\,\pi} \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [-\cos\theta]_0^{\pi}\,[\varphi]_0^{2\,\pi} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$.

Exercice 7 : Champ électrique créé par une charge ponctuelle

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q située en O s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r.$$

1. Calculer le flux ϕ du champ $\vec{E}$ à travers la surface d'une sphère de centre O et de rayon R.
2. Calculer la divergence du champ $\vec{E}(r)$, avec $r \neq 0$.
3. Calculer le rotationnel du champ $\vec{E}(r)$, avec $r \neq 0$.

Correction :

1. Par définition, le flux du champ $\vec{E}$ à travers la surface de normale $\vec{e}_r$ est :
$\phi = \displaystyle\oiint_{S_{\text{sphère}}} \vec{E}(R)\cdot\mathrm{d}\vec{S}_r = \oiint_{S_{\text{sphère}}} \left(\frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R^2}\,\vec{e}_r\right)\cdot\left(R^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_r\right) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\oiint_{S_{\text{sphère}}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, soit en séparant les variables : $\phi = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{2\,\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,[-\cos\theta]_0^{\pi}\,[\varphi]_0^{2\,\pi} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

2. En coordonnées sphériques : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial\left(r^2\,E_r\right)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial\left(\sin\theta\,E_\theta\right)}{\partial\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\,\dfrac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}$, or $E_\theta = E_\varphi = 0$ car $\vec{E}$ est orienté selon $\vec{e}_r$, d'où : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial\left(r^2\,E_r\right)}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{q}{4\,pi\,\varepsilon_0}\right) = 0$.

3. En coordonnées sphériques :
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial\left(\sin\theta\,E_\varphi\right)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial\left(r\,E_\varphi\right)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\left(r\,E_\theta\right)}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$,
or $E_\theta = E_\varphi = 0$ car $\vec{E}$ est orienté selon $\vec{e}_r$, d'où : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\,\dfrac{\partial E_r}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(-\dfrac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi = \vec{0}$.